

Monika BOLIŃSKA*

Paweł DYKAS**

Mariusz TROJAK***

DEMOGRAFICZNE CZYNNIKI WZROSTU PRODUKTU W WYBRANYCH KRAJACH EUROPY ŚRODKOWO-WSCHODNIEJ¹

(Streszczenie)

Celem prezentowanego opracowania jest rozwinięcie neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego Solowa poprzez uchylenie założenia dotyczącego stałych stóp wzrostu liczby pracujących. Ponadto, opierając się o tak rozbudowany model, dokonano symulacji numerycznych dla gospodarek: Czech, Polski, Węgier i Słowacji. W opracowaniu autorzy założyli, iż ścieżka wzrostu liczby pracujących jest równa iloczynowi ścieżek wzrostu liczby ludności oraz współczynnika aktywności ekonomicznej, który w opracowaniu rozumiany jest jako stosunek liczby pracujących do liczby ludności. Ponadto przyjęta w opracowaniu ścieżka wzrostu liczby pracujących rośnie asymptotycznie do stałej wartości, a nie do nieskończoności, jak ma to miejsce w modelu Solowa. W części empirycznej opracowania autorzy dokonali kalibracji parametrów otrzymanego modelu oraz dokonali symulacji numerycznych. Analizą objęto cztery gospodarki Europy Środkowo-Wschodniej – Czechy, Polskę, Słowację i Węgry. Symulacje numeryczne prowadzone były dla okresu 2000–2050, przy czym dane dotyczące liczby pracujących i wielkości populacji zaczerpnięto ze strony EUROSTAT. Symulacje numeryczne pozwoliły na wyznaczenie ścieżek wzrostu produktu w omawianych gospodarkach, przy różnych scenariuszach dotyczących kształtowania się stóp inwestycji.

Słowa kluczowe: model Solowa; ścieżki wzrostu produktu; ścieżki wzrostu kapitału; współczynnik aktywności ekonomicznej

Klasyfikacja JEL: O4, E270

* Mgr, Uniwersytet Jagielloński; e-mail: monika_bolinska@op.pl

** Dr, Uniwersytet Jagielloński, Katedra Ekonomii Matematycznej; e-mail: paweldykas@op.pl

*** Dr, Uniwersytet Jagielloński, Katedra Globalizacji i Integracji Europejskiej; e-mail: mariusz.trojak@uj.edu.pl

¹ Opracowanie powstało w ramach grantu NCN pt. Cykle wzrostu – dynamiczne modele koniunktury i wzrostu gospodarczego nr OPUS8 UMO-2014/15/B/HS4/04264.

1. Wstęp

W literaturze dotyczącej zagadnień wzrostu gospodarczego od wielu lat podnosi się rolę czynników demograficznych. W większości badań zwraca się uwagę nie tylko na kwestie zmiany liczby ludności, ale przede wszystkim na strukturę populacji badanych gospodarek². Autorzy opracowania dokonali rozwinięcia neoklasycznego modelu wzrostu Solowa, uchylając założenie o stałej stopie wzrostu liczby pracujących. W opracowaniu autorzy założyli, iż ścieżka wzrostu liczby pracujących jest równa iloczynowi ścieżek wzrostu liczby ludności oraz współczynnika aktywności ekonomicznej, który w opracowaniu rozumiany jest jako stosunek liczby pracujących do liczby ludności. Przyjęta w opracowaniu modyfikacja dotycząca wzrostu liczby pracujących pozwoliła na wyznaczenie ścieżki wzrostu liczby pracujących, która rośnie asymptotycznie do stałej wartości po krzywej wykładniczej, a nie do nieskończoności, jak ma to miejsce w oryginalnym modelu Solowa.

Opracowanie ma następującą strukturę: w pierwszej części – teoretycznej – zbudowano model wzrostu gospodarczego będący rozwinięciem modelu Solowa. W tej części wyprowadzono ścieżki wzrostu kapitału oraz produktu na jednostkę efektywnej pracy. W następnej części – empirycznej – dokonano kalibracji parametrów modelu wzrostu. Kolejnym etapem było wyznaczenie ścieżek wzrostu liczby pracujących, przy czym liczbę pracujących definiowano jako iloczyn liczby ludności i współczynnika aktywności ekonomicznej. Dane dotyczące liczby ludności zaczerpnięto z EUROSTAT (przy czym dane za rok 2000 pochodziły z bazy danych historycznych, zaś dla roku 2050 pochodziły z prognoz demograficznych publikowanych przez EUROSTAT). Z kolei wartości współczynnika aktywności ekonomicznej dla roku 2000 pochodziły również EUROSTAT, zaś dla roku 2050 autorzy przyjęli założenie, że wartość tego współczynnika w analizowanych gospodarkach będzie zbliżona do wartości tegoż wskaźnika, jakie osiągały najwyżej rozwinięte gospodarki Unii Europejskiej w roku 2000.

Co więcej, w części empirycznej opracowania dokonano symulacji numerycznych ścieżek wzrostu produktu przy różnych scenariuszach kształtowania się stopy inwestycji.

W zakończeniu wskazano najważniejsze wnioski płynące z przeprowadzonych analiz.

² A. Prskawetz, W. Barthel, *The Relationship Between Demographic Change and Economic Growth in the EU*, Vienna Institute of Demography, Austria Academy of Science, Research Report 2007/32, s. 36.

2. Model wzrostu gospodarczego

Rozważany w opracowaniu model wzrostu gospodarczego opiera się na następujących założeniach:

- 1) Produkt kształtuje się według następującej neoklasycznej funkcji produkcji³:

$$Y(t) = (K(t))^\alpha (E(t))^{1-\alpha}, \quad (1)$$

gdzie: $\alpha \in (0; 1)$, zaś Y to produkt wytworzony w gospodarce oraz K, E – to (odpowiednio) nakłady kapitału i tzw. jednostki efektywnej pracy (będącej iloczynem liczby pracujących i zasobu wiedzy naukowo-technicznej), natomiast α to elastyczność wytworzonego w gospodarce produktu względem nakładów kapitału i $1 - \alpha$ to elastyczność produktu względem jednostek efektywnej pracy⁴.

- 2) Przyrost zasobu kapitału w chwili t , podobnie jak ma to miejsce w modelu wzrostu Solowa [1956], równy jest s -tej części produktu pomniejszonej o zdeprecjonowany kapitał, zatem⁵:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t). \quad (2)$$

Przy czym, $\delta \in (0; 1)$ $s \in (0; 1)$ oznacza (odpowiednio) stopę inwestycji i stopę deprecjacji kapitału.

- 3) Liczba pracujących $L(t)$ w momencie t definiowana jest jako liczba ludności $N(t)$ ważona współczynnikiem aktywności ekonomicznej $\tau(t)$, zatem:

$$L(t) = N(t) \cdot \tau(t). \quad (3)$$

Ponadto zakłada się, że liczba ludności $N(t)$ oraz współczynnik aktywności ekonomicznej $\tau(t)$ opisane są (odpowiednio) jako:

$$N(t) = (N_0 + \eta_2 e^{-\theta_2 \cdot t})^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (4)$$

³ Szerzej na temat neoklasycznej funkcji produkcji można znaleźć w opracowaniu: **E. Żółtowska**, *Funkcja produkcji. Teoria, estymacja, zastosowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1997.

⁴ O wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych zakłada się, iż są różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \geq 0$. Zapis $x(t)$ oznaczał będzie dalej wartość zmiennej x w momencie t , zaś $\dot{x}(t) = dx/dt$ – pochodną zmiennej x po czasie t , czyli (ekonomicznie rzecz biorąc) przyrost wartości owej zmiennej w momencie t .

⁵ **R.M. Solow**, *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, February 1956.

oraz

$$\tau(t) = (\tau_0 - \eta_1 e^{-\theta_1 t})^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (5)$$

- 4) Jednostki efektywnej pracy $E(t)$ rosną według stopy wzrostu równej $g + l(t)$, przy czym $g > 0$ jest stopą harrodiańskiego postępu technicznego, zaś $l(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$ jest stopą wzrostu liczby pracujących, wynika stąd, że stopę wzrostu liczby pracujących można zapisać jako:

$$\dot{E}(t) / E(t) = g + l(t). \quad (6)$$

Stąd oraz korzystając z założenia (3) wynika, że stopa wzrostu liczby pracujących $l(t)$ opisana jest następującym równaniem:

$$l(t) = \frac{N_0 \eta_1 \theta_1 e^{-\theta_1 t} - \tau_0 \eta_2 \theta_2 e^{-\theta_2 t} + \eta_1 \eta_2 (\theta_1 + \theta_2) e^{-t(\theta_1 + \theta_2)}}{(N_0 + \eta_2 e^{-\theta_2 t})(\tau_0 - \eta_1 e^{-\theta_1 t})(1-\alpha)}. \quad (7)$$

- 5) Zakładając, że $y_E = Y/E$ oraz $k_E = K/E$ to (odpowiednio) strumień wytworzonego produktu oraz zasób kapitału na jednostkę efektywnej pracy. Ponadto zakładając, że $y = Y/L$ oraz $k = K/L$ to (odpowiednio) wydajność pracy i techniczne uzbrojenie pracy, wówczas spełnione są zależności:

$$y(t) = A_0 e^{gt} y_E(t), \quad (8)$$

$$k(t) = A_0 e^{gt} k_E(t), \quad (9)$$

$$Y(t) = L_0 e^{nt} y(t), \quad (10)$$

$$K(t) = L_0 e^{nt} k(t). \quad (11)$$

Z funkcji produkcji (1) można dojść do funkcji produkcji w postaci intensywnej, dzieląc ją stronami przez jednostki efektywnej pracy $E > 0$:

$$y_E(t) = (k_E(t))^\alpha. \quad (12)$$

Relacja (12) opisuje zależność pomiędzy nakładami kapitału na jednostkę efektywnej pracy (k_E) a wielkością produkcji na jednostkę owej pracy (y_E).

Różniczkując kapitał na jednostkę efektywnej pracy ($k_E = K/E$) po czasie t mamy:

$$\dot{k}_E(t) = \frac{\dot{K}(t)E(t) - K(t)\dot{E}(t)}{(E(t))^2} = \frac{\dot{K}(t)}{E(t)} - \frac{\dot{E}(t)}{E(t)}k_E(t),$$

co wraz ze związkami (2–4) daje:

$$\dot{k}_E(t) = sy_E(t) - \mu(t)k_E(t), \quad (13)$$

gdzie: $\mu(t) = \delta + g + l(t) > 0$ oznacza stopę ubytku kapitału na jednostkę efektywnej pracy. Równanie różniczkowe (13) jest odpowiednikiem równania ruchu Solowa w omawianym tu modelu wzrostu gospodarczego.

Uwzględniając funkcję produkcji w postaci intensywniej (12) oraz zależność (13), otrzymać można następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{k}_E(t) = s(k_E(t))^\alpha - \mu(t)k_E(t). \quad (14)$$

Równanie (14) dla każdego $t \geq 0$ posiada trywialne rozwiązanie ($k_E(t) = 0$) oraz pewną rodzinę całek nietrywialnych⁶.

Równanie (14) dla $k_E > 0$ można zapisać jako:

$$(k_E(t))^{-\alpha} \dot{k}_E(t) = s - \mu(t)(k_E(t))^{1-\alpha}, \quad (15)$$

dokonując następującego podstawienia:

$$q(t) = (k_E(t))^{1-\alpha}, \quad (16)$$

Równanie (15) można sprowadzić do równania niejednorodnego danego wzorem:

$$\frac{\dot{q}(t)}{1-\alpha} = s - \mu(t)q(t),$$

które można przekształcić do zależności:

$$\dot{q}(t) = (1-\alpha)s - (1-\alpha)\mu(t)q(t). \quad (17)$$

⁶ Całka trywialna (jako nieciekawa zarówno z matematycznego, jak i ekonomicznego punktu widzenia) będzie dalej pomijana. Nietrywialna zaś całka owego równania wyznaczała będzie ścieżkę czasową (lub ścieżkę wzrostu) kapitału na jednostkę efektywnej pracy.

Rozważając równanie jednorodne ze związku (17) otrzymujemy:

$$\dot{q}(t) = -(1-\alpha)\mu(t)q(t), \quad (18)$$

rozwiązanie równania (18) dane jest wzorem:

$$q(t) = A(t)e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (L(t))^{\alpha-1}. \quad (19)$$

przy czym czynnik $A(t)$ to uzmienniona stała całkowania. Różniczkując równanie (19) względem czasu oraz uwzględniając zależności (18), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (1-\alpha)s - (1-\alpha) \left(\delta + g + \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \right) A(t) e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (L(t))^{\alpha-1} = \\ \dot{A}(t) e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (L(t))^{\alpha-1} + A(t)(\alpha-1)(\delta+g) e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (L(t))^{\alpha-1} + \\ + A(t) e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (\alpha-1)(L(t))^{\alpha-2} \dot{L}(t). \end{aligned}$$

Stąd oraz ze związków (3)–(5) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A(t) = (1-\alpha)s \left(\frac{N_0 \tau_0 e^{(1-\alpha)(\delta+g)t}}{(1-\alpha)(\delta+g)} - \frac{N_0 \eta_1 e^{t[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1]}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1} + \right. \\ \left. + \frac{\tau_0 \eta_2 e^{t[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_2]}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_2} - \frac{\eta_1 \eta_2 e^{t[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1-\theta_2]}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1-\theta_2} \right) + C, \end{aligned}$$

gdzie $C > 0$.

Stąd oraz ze związków (16) i (19) kapitał na jednostkę efektywnej pracy można zapisać jako:

$$\begin{aligned} k_E(t) = \left[\left((1-\alpha)s \left(\frac{N_0 \tau_0 e^{(1-\alpha)(\delta+g)t}}{(1-\alpha)(\delta+g)} - \frac{N_0 \eta_1 e^{t[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1]}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1} + \frac{\tau_0 \eta_2 e^{t[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_2]}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\eta_1 \eta_2 e^{t[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1-\theta_2]}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1-\theta_2} \right) + C \right) e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (L(t))^{\alpha-1} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (20) \end{aligned}$$

Zakładając, że dla omawianego problemu warunek brzegowy Cauchy'ego przyjmuje postać: $k_E(0) = k_{E0} \geq 0$, stałą $C > 0$ możemy zapisać jako:

$$C = \frac{(k_{E0})^{1-\alpha}}{L(0)^{\alpha-1}} - \frac{N_0 \tau_0 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)} + \frac{N_0 \eta_1 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1} - \frac{\tau_0 \eta_2 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_2} + \\ + \frac{\eta_1 \eta_2 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1-\theta_2}.$$

Stąd całka równania (14) dana jest jako:

$$k_E(t) = \left[\left((1-\alpha)s \left(\frac{N_0 \tau_0 e^{(1-\alpha)(\delta+g)t}}{(1-\alpha)(\delta+g)} - \frac{N_0 \eta_1 e^{[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1]t}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1} + \frac{\tau_0 \eta_2 e^{[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_2]t}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_2} - \frac{\eta_1 \eta_2 e^{[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1-\theta_2]t}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1-\theta_2} \right) + \frac{(k_{E0})^{1-\alpha}}{L(0)^{\alpha-1}} - \frac{N_0 \tau_0 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)} + \frac{N_0 \eta_1 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1} - \frac{\tau_0 \eta_2 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_2} + \frac{\eta_1 \eta_2 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1-\theta_2} \right) e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (L(t))^{\alpha-1} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Ponadto produkt na jednostkę efektywnej pracy ($y_E(t)$) opisany jest równaniem:

$$y_E(t) = \left[\left((1-\alpha)s \left(\frac{N_0 \tau_0 e^{(1-\alpha)(\delta+g)t}}{(1-\alpha)(\delta+g)} - \frac{N_0 \eta_1 e^{[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1]t}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1} + \frac{\tau_0 \eta_2 e^{[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_2]t}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_2} - \frac{\eta_1 \eta_2 e^{[(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1-\theta_2]t}}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1-\theta_2} \right) + \frac{(k_{E0})^{1-\alpha}}{L(0)^{\alpha-1}} - \frac{N_0 \tau_0 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)} + \frac{N_0 \eta_1 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1} - \frac{\tau_0 \eta_2 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_2} + \frac{\eta_1 \eta_2 (1-\alpha)s}{(1-\alpha)(\delta+g)-\theta_1-\theta_2} \right) e^{-(1-\alpha)(\delta+g)t} (L(t))^{\alpha-1} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (21)$$

3. Symulacje numeryczne modelu

W pierwszym etapie symulacji numerycznych dokonano kalibracji parametrów omówionego w pierwszej części modelu. Kalibracji parametrów dotyczących ścieżek wzrostu liczby populacji dokonano, opierając się o następującą koniunkcję:

$$(N_0^j + \eta_2^j)^{\frac{1}{1-\alpha}} = N_{2000}^j \wedge (N_0^j)^{\frac{1}{1-\alpha}} = N_{2050}^j,$$

gdzie dla j przebiegającego zbiór $\{C, P, S, W\}$ N_{2000}^j oznacza liczbę pracujących w roku 2000, zaś N_{2050}^j populację prognozowaną przez EUROSTAT na rok 2050 w krajach (odpowiednio): Czechach, Polsce, Słowacji i na Węgrzech. Wartości powyższych parametrów zestawione zostały w tabeli 1. Następnie dokonano kalibracji parametrów ścieżek wzrostu współczynnika aktywności ekonomicznej (definiowanym jako stosunek liczby pracujących do liczby populacji). W tym celu rozważono następujące warunki:

$$(\tau_0^j + \eta_1^j)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \tau_{2000}^j \wedge (\tau_0^j)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \tau_{2050}^j,$$

Przy czym τ_{2000}^j to wartość współczynnika aktywności ekonomicznej w roku 2000, natomiast τ_{2050}^j oznacza wartość owego współczynnika w roku 2050 ($j \in \{C, P, S, W\}$). Wartość współczynnika aktywności ekonomicznej w roku 2050 dla wszystkich rozważanych krajów przyjęto na poziomie równym jego przeciętnej wartości, który charakteryzował gospodarki o najwyższym poziomie tego wskaźnika wśród gospodarek UE w 2000 r., czyli: brytyjską, holenderską, niemiecką oraz szwedzką. Natomiast wartości τ_{2000}^j , obliczone w oparciu o dane statystyczne zaczerpnięte z EUROSTAT, dla omawianych krajów zestawiono w tabeli 1.

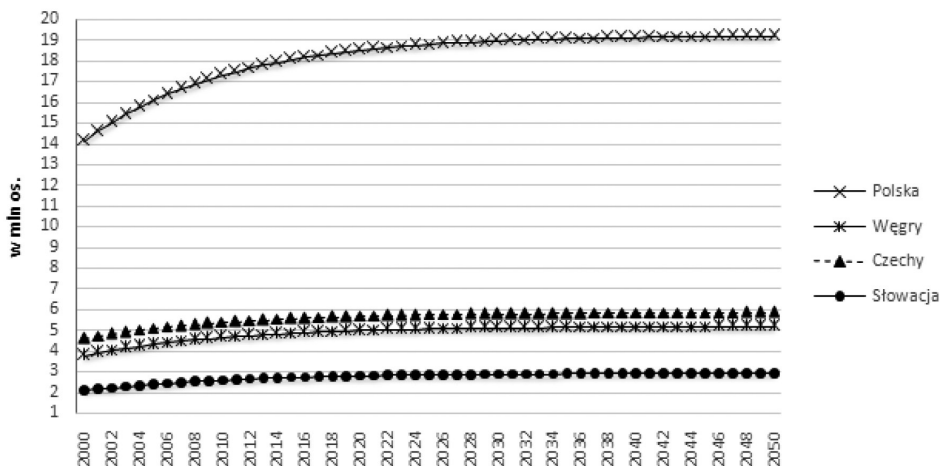
TABELA 1: Liczba populacji w roku 2000 oraz 2050 (w mln osób) oraz współczynnik aktywności ekonomicznej w roku 2000 w Czechach, Polsce, Słowacji i na Węgrzech

	Czechy	Polska	Słowacja	Węgry
N_{2000}^j	10,28	38,26	5,40	10,22
N_{2050}^j	10,48	34,37	5,26	9,29
τ_{2000}^j	44,90	37,00	38,82	37,23

Źródło: opracowanie własne.

Opierając się o parametry ścieżek wzrostu populacji i współczynnika aktywności ekonomicznej, wyznaczono prognozowane ścieżki wzrostu liczby pracujących w omawianych gospodarkach, które zostały przedstawione na rysunku 1.

RYSUNEK 1: Prognoza populacji w Czechach, Polsce, Słowacji i na Węgrzech (w latach 2000–2050)

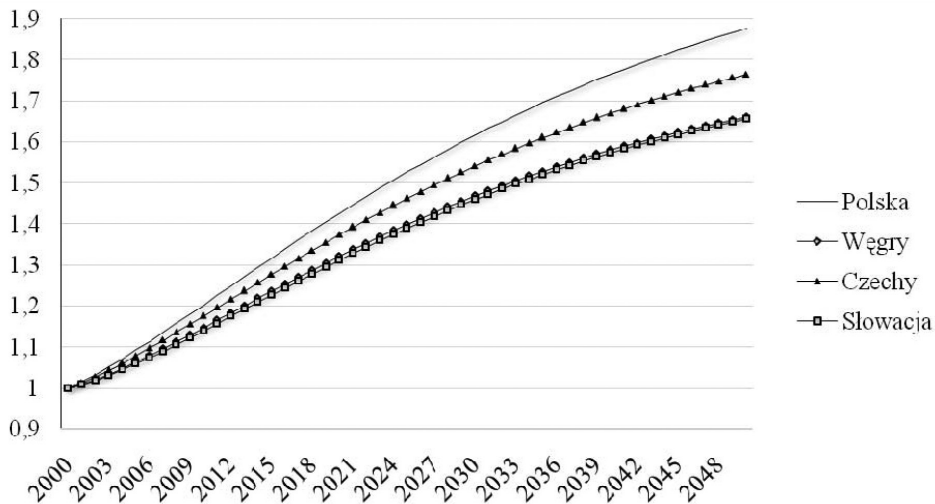


Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony: <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database>; stan na 10.05.2017 r.

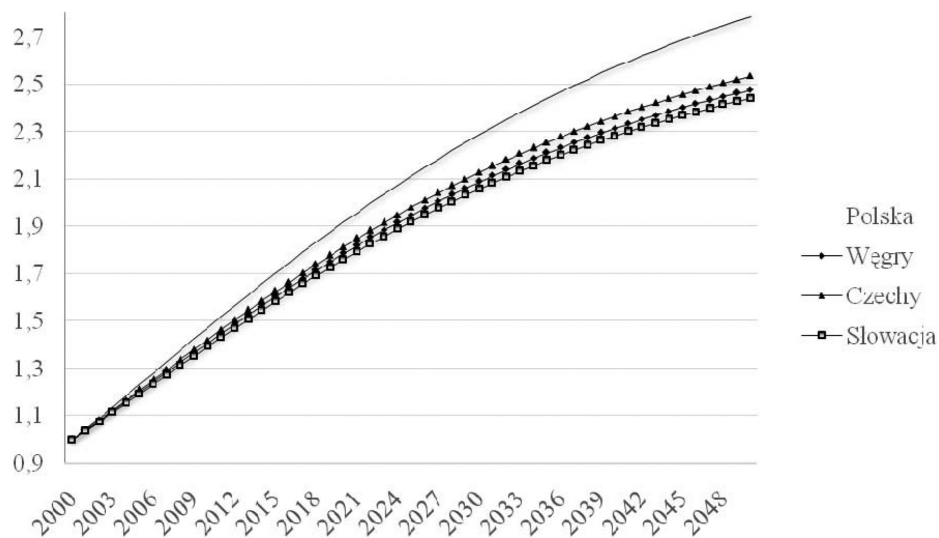
Analizując rysunek 1, zauważyć można, że pomimo spadku populacji w Polsce, na Słowacji i na Węgrzech liczba pracujących rośnie w każdej omawianej gospodarce. Wzrost ten wynika z przyjętego scenariusza dotyczącego kształtowania się wskaźnika aktywności ekonomicznej. Bowiern wzrost liczby pracujących nie zależy tylko od czynników demograficznych, lecz również od czynników związanych z koniunkturą gospodarczą. Przyjęty poziom współczynników aktywności ekonomicznej na poziomie średniej wartości tego współczynnika wśród krajów charakteryzujących się najwyższym udziałem pracujących w populacji wytłumaczyć można efektem malejącego bezrobocia, wydłużania wieku aktywności zawodowej czy też większej aktywności zawodowej w niektórych grupach bezrobotnych (np. wśród kobiet).

W kolejnym etapie dokonano kalibracji parametrów ścieżek wzrostu kapitału na jednostkę efektywnej pracy (k_E) oraz produktu na jednostkę efektywnej pracy (y_E). W symulacjach przyjęto stopę postępu technicznego (g) na poziomie 2%, stopę deprecjacji kapitału na poziomie 5%. Ponadto elastyczność produktu względem kapitału (α) przyjęto na poziomie 0,6, natomiast dla stopy inwestycji przyjęto trzy scenariusze dotyczące jej wartości, tj. 15%, 20% i 25%⁷.

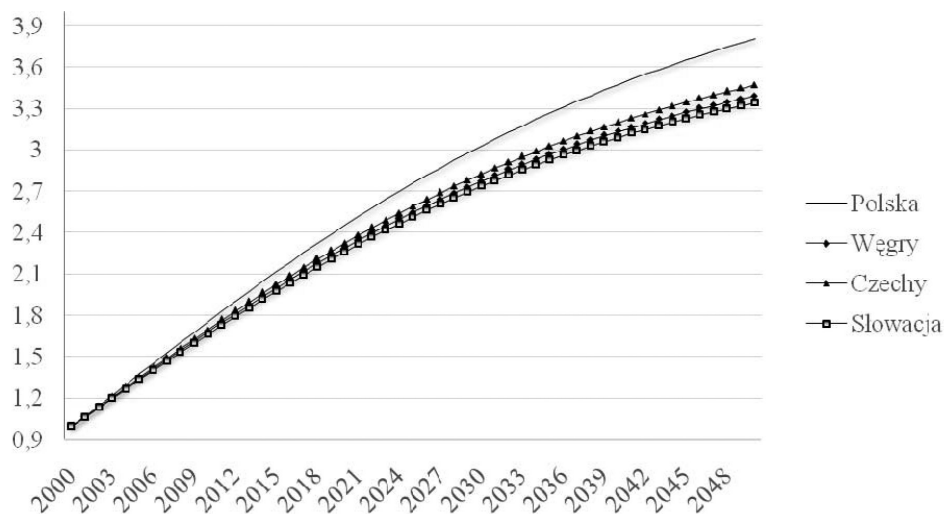
⁷ Podobne wartości powyższych parametrów przyjmowane były np. w opracowaniu: **K. Filipowicz, R. Syrek, T. Tokarski**, Ścieżki wzrostu modelu Solowa przy alternatywnych trajektoriach liczby pracujących, *Przegląd Statystyczny* 2017/LXIV.

RYSUNEK 2: Ścieżki wzrostu produktu ($y_E(t)$) przy stopie inwestycji $s = 15\%$ 

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony: <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database>; stan na 10.05.2017 r.

RYSUNEK 3: Ścieżki wzrostu produktu ($y_E(t)$) przy stopie inwestycji $s = 20\%$ 

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony: <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database>; stan na 10.05.2017 r.

RYSUNEK 4: Ścieżki wzrostu produktu ($y_E(t)$) przy stopie inwestycji $s = 25\%$ 

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony: <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database>; stan na 10.05.2017 r.

Wyniki symulacji numerycznych ścieżek wzrostu produktu ($y_E(t)$) przy horyzoncie czasowym 2000–2050 przedstawiono na w rysunkach 2–4 oraz w tabeli 2⁸.

TABELA 2: Przyrost produktu na jednostkę efektywnej pracy ($y_E(t)$) w roku 2050 w stosunku do roku 2000 przy różnych stopach inwestycji w Czechach, Polsce, Słowacji i na Węgrzech

Warianty	Polska	Węgry	Czechy	Słowacja
$s = 15\%$	1,88	1,66	1,77	1,65
$s = 20\%$	2,79	2,48	2,54	2,44
$s = 25\%$	3,81	3,39	3,47	3,35

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych ze strony: <http://ec.europa.eu/eurostat/data/database>; stan na 10.05.2017 r.

⁸ Podobne założenia dotyczące stóp inwestycji można znaleźć np. w: P. Dykas, T. Misiak, *Cykliczność inwestycji w modelu wzrostu gospodarczego – ujęcie teoretyczne oraz symulacje numeryczne*, Studia Prawno-Ekonomiczne 2016/C, s. 207.

Analizując rysunki 2–4, zauważyć można, że ścieżki wzrostu produktu na jednostkę efektywnej pracy ($y_E(t)$) na Słowacji i na Węgrzech (przy założonych scenariuszach) miały zbliżoną trajektorię wzrostu. Natomiast ścieżki wzrostu produktu ($y_E(t)$) dla Polski i Czech były wyżej położone. Wynika to oczywiście z wielkości liczby pracujących w tych gospodarkach. Z owych rysunków wynika również, że wielkość stopy inwestycji ma istotny wpływ na położenie ścieżek wzrostu produktu ($y_E(t)$) we wszystkich badanych krajach. Zatem, im wyższa stopa inwestycji, tym wyżej położona była ścieżka wzrostu produktu ($y_E(t)$).

Dokonując analizy wyników symulacji numerycznych zestawionych w tabeli 2 dla ścieżek wzrostu produktu ($y_E(t)$) przy stopie inwestycji równej 15%, produkt na jednostkę efektywnej pracy w Czechach, Polsce, na Słowacji i na Węgrzech wzrasta (odpowiednio) ok. 1,77; 1,88; 1,65 i 1,66 krotnie. Przy stopie inwestycji równej 20% produkt wzrósł w Czechach, Polsce, na Słowacji i na Węgrzech o ok. 2,44; 2,79; 2,44 oraz 2,48 razy. Natomiast wzrost dla Czech, Polski, Słowacji i Węgier równy (odpowiednio) 3,47; 3,81; 3,35 i 3,39 występował dla stopy inwestycji równej 25%.

4. Zakończenie

Z przeprowadzonych w opracowaniu rozważaniach wynikają następujące wnioski:

1. Przedstawiony w artykule model wzrostu gospodarczego stanowi modyfikację neoklasycznego modelu Solowa-Swana (1956). W rozważanym modelu uchylono założenie modelu Solowa-Swana mówiące o stałej stopie wzrostu liczby pracujących. W omawianym modelu przyjęto założenie, że liczba pracujących to liczba ludności ważona współczynnikiem aktywności ekonomicznej τ , rozumianym jako udział pracujących w wielkości populacji. Założenie to pozwoliło na uwzględnienie w modelu czynników demograficznych jak również czynników wynikających z procesów zachodzących na rynku pracy.
2. Z przeprowadzonych symulacji numerycznych analizowanego modelu można wyciągnąć wniosek, iż prognozy dotyczące kształtowania się wielkości populacji w Polsce, na Słowacji i na Węgrzech w 2050 r. nie muszą negatywnie wpływać na liczbę pracujących. Wzrost liczby pracujących w tych krajach, do 2050 r., jest możliwy pod warunkiem wzrostu współczynnika aktywności ekonomicznej, który może niwelować spadek liczby ludności poprzez lepsze wykorzystanie zasobów ludzkich w gospodarkach.

3. Wielkość produktu, przy założonej stopie inwestycji równej 15%, w Czechach, Polsce, na Słowacji i na Węgrzech wzrasta (odpowiednio) ok. 1,77; 1,88; 1,65 i 1,66 krotnie. Natomiast przy stopie inwestycji równej 20% produkt na jednostkę efektywnej pracy wzrósł w Czechach, Polsce, na Słowacji i na Węgrzech o ok. 2,44; 2,79; 2,44 oraz 2,48 razy. Zaś zakładając stopę inwestycji na poziomie 25%, wzrost produktu w roku 2050 w stosunku do roku 2000 w Czechach, Polsce, na Słowacji i na Węgrzech wynosił (odpowiednio) 3,47; 3,81; 3,35 i 3,39 razy.

Bibliografia

Opracowania

- Cobb Charles W., Douglas Paul H.**, *A Theory of Production*, American Economics Review 1928/18.
- Dykas Paweł, Misiak Tomasz**, *Cykliczność inwestycji w modelu wzrostu gospodarczego – ujęcie teoretyczne oraz symulacje numeryczne*, Studia Prawno-Ekonomiczne 2016/C.
- Dykas Paweł, Misiak Tomasz**, *Neoklasyczny model wzrostu gospodarczego z sinusoidalnymi inwestycjami*, Przegląd Statystyczny 2016/LXIII.
- Filipowicz Katarzyna, Syrek Robert, Tokarski Tomasz**, *Ścieżki wzrostu modelu Solowa przy alternatywnych trajektoriach liczby pracujących*, Przegląd Statystyczny 2017/LXIV.
- Nonneman Walter, Vanhoudt Patric**, *A Futher Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economics Growth for the OECD Countries*, Quarteley Journal of Economics, August 1996.
- Prskawetz Alexia, Barthel Wolf**, *The Relationship Between Demographic Change and Economic Growth in the EU*, Viena Institute of Demography, Austria Academy of Science, Research Report 2007/32.
- Romer David**, *Makroekonomia dla zaawansowanych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.
- Solow Robert M.**, *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, February 1956.
- Tokarski Tomasz**, *Matematyczne modele wzrostu gospodarczego (ujęcie neoklasyczne)*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2009.
- Żółtowska Elżbieta**, *Funkcja produkcji. Teoria, estymacja, zastosowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1997.

Strony internetowe

<http://ec.europa.eu/eurostat>; stan na 10.05.2017 r.

Monika BOLIŃSKA, Paweł DYKAS, Mariusz TROJAK

**DEMOGRAPHIC DETERMINANTS OF THE ECONOMIC GROWTH IN CHOSEN
CENTRAL EUROPEAN COUNTRIES**

(S u m m a r y)

The aim of the paper was the development of the neoclassical Solow economic growth model. Thanks to the exclusion of assumption of the fixed growth rate of the labor force, the authors conducted simulations for the Czech, Polish, Hungarian and Slovak economies. The authors assumed that the growth path of the labor force equals the population multiplied by the labor activity index (defined as the number of employees divided by the population). Additionally, the growth rate of the labor force has an asymptotic shape towards the fixed value, which is contrary to the pure Solow model, where this rate increases to infinity.

In the empirical part the calibration of model parameters and numeric simulation was conducted. This simulation was done in the period 2000–2050. The data were taken from EUROSTAT data base. The numeric simulation allowed to create economic growth path with respect to the different investment rates.

Keywords: Solow model; growth rate paths; capital growth paths; labor activity index